EXPLICADOR

DE

ARITHMETICA

Pontos de Arithmetica do programma de exames de preparatorios organisado pelo Conselho Director de Instrucção Primaria e Secundaria em 1877, desenvolvidos na 5ª edição do Explicador de Arithmetica de Eduardo de Sá.

EXPLICADOR

DE

ARITHMETICA

OBRA APROPRIADA AOS ALUMNOS DAS ACADEMIAS MILITAR E DE MARINHA, DO INSTITUTO COMMERCIAL, ASPIRANTES A EMPREGADOS PUBLICOS, NEGOCIANTES, ARTISTAS, ETC.

POR

EDUARDO DE SA' PEREIRA DE CASTRO

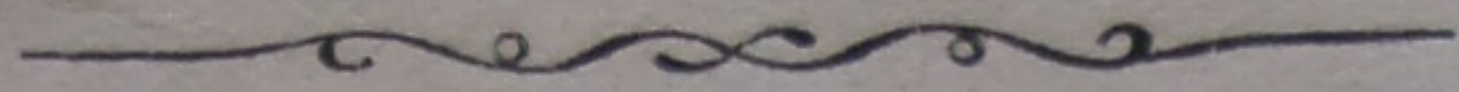
BACHAREL EM MATHEMATICAS E SCIENCIAS PHYSICAS E NATURAES

QUINTA EDIÇÃO

CORRECTA E AUGMENTADA

POR

João Chrockatt de Sá Pereira de Castro

BACHAREL EM MATHEMATICAS E SCIENCIAS PHYSICAS E NATURAES

RIO DE JANEIRO

Á VENDA NA LIVRARIA CLASSICA DO EDITOR

NICOLAO-ALVES

48 RUA DE GONÇALVES DIAS 48

1880

RIO DE JANEIRO

Typographia do — Apostolo — Rua Nova do Ouvidor ns. 14 e 16

SIGNIFICAÇÃO

DOS

SIGNAES CONVENCIONADOS E USADOS NO DECURSO DESTA OBRA.

$+$ Que quer dizer—mais—exprime addição.

$-$ Que quer dizer—menos—exprime subtracção.

$\times$ Que quer dizer—multiplicado por—e exprime multiplicação.

$\div$ Que quer dizer—dividido por—e exprime divisão.

$>$ Que quer dizer—maior que.

$<$ Que quer dizer—menor que.

$=$ Que quer dizer—igual.

$:$ Que quer dizer—está para, ou dividido por.

$::$ Que quer dizer—assim como, ou igual a.

$\sqrt{}$ Que quer dizer—raiz quadrada.

$\sqrt[3]{}$ Que quer dizer—raiz cubica.

$\therefore$ Que quer dizer—logo.

Senhor.

Quando resolvi dar á luz da publicidade este meu mesquinho trabalho, considerei, e pesei bem todas as difficuldades com que tinha de lutar, não só para apresentar um escripto util e digno da attenção publica, mas tambem para faze-lo aceitar como tal, baldo, como sou, de um nome que possa servir de titulo a um livro.

Medindo pelas minhas forças as difficuldades da empreza, a consciencia me fez desanimar; recebi, porém, de Vossa Magestade a coragem que me faltava; as palavras benevolentes de Vossa Magestade me garantirão a utilidade do meu trabalho, assim como lhe augura a prospera carreira a graça especial que Vossa Magestade me concede de o dedicar á Vossa Magestade.

Vigorado por tão alta protecção, publico o meu livro, possuido das mais lisongeiras esperanças; e, penetrado da mais profuuda gratidão, o deposito aos pés do Magnanimo Monarcha que o collocou á sombra do Seu Manto, e Cujas Mãos reverente beijo.

De Vossa Magestade Imperial

respeitoso e obediente subdito

EDUARDO DE SÁ PEREIRA DE CASTRO.

NOÇÃO HISTORICA

Fracos e obscuros forão os primeiros passos do espirito humano, e por isso pouca attenção excitárão áquelles que forão delles testemunhas; remota é a época em que esses passos forão dados, e eis a razão porque a origem das sciencias ou se perde inteiramente na noite dos tempos, ou se acha envolvida nas trevas da incerteza. Em taes circumstancias, bem difficil se torna a tarefa do historiador que tem de apreciar os testemunhos e discernir o da credulidade ou da ignorancia, daquelle que se estabelece em fundamentos solidos.

Segundo Strabon, os Phenicios forão os primeiros arithmeticos; e esta opinião é fundada no facto de terem elles sido os primeiros e os mais habeis commerciantes, e a arithmetica em parte alguma ser mais util e necessaria do que no commercio: e Cedreno diz que Phenix, filho de Agenor, foi o primeiro que escreveu uma arithmetica em lingua phenicia.

De outro lado o Egypto se vangloriava de ter sido o berço desta sciencia; mas ainda assim um povo se apresenta merecendo as honras de, pelo menos, lhe ser associado; são os Chaldeos. Este povo nos offerece os primeiros traços dos conhecimentos astronomicos, e para isso era preciso que elle tivesse uma arithmetica, e muito adiantada.

E' evidente que a arithmetica, este ramo dos conhecimentos humanos, deve ter precedido a todos os outros ; por isso que, desde que se possue alguma cousa, se é obrigado a fazer uso dos numeros: assim pois, as primeiras sociedades não poderião passar sem uma arithmetica, natural sim, e de pequena extensão; mas, á medida que as sociedades crescêrão em riqueza ou em commercio, forão estendendo os limites dessa arithmetica natural, inventando signaes ou processos abreviados para ajudar o espirito nos calculos mais complicados. Donde se conclue, ser muito razoavel a opinião de Strabon, considerando os phenicios os primeiros arithmeticos, por serem levados pela necessidade do seu commercio a dar extensão á sciencia dos numeros. Mas isto não quer dizer que os Phenicios forão os inventores da arithmetica; não, por isso que ha razões que nos fazem crer que todos os povos forão naturalmente levados pela necessidade a este conhecimento; e é como se explica o accordo de quasi todos os povos escolherem o mesmo systema de numeração, sendo de mais este systema o de progressão decupla, que nos indica que os homens na infancia de sua razão começárão a contar pelos dedos. Tres unicas nações erão originaes no seu systema de contar: os antigos Chinezes, uma nação de Thracios, de que falla Aristóteles, e os Jalofs, povo de pretos vizinho ao *Senegal*. Os primeiros se servirão da progressão vigecupla, e com ella formárão a sua arithmetica chamada binaria ; os segundos não contavão senão até 4, isto é, por periodos de 4, o que faz crer que este povo, vivendo em uma grande simplicidade, tinha necessidade de poucas cousas; os terceiros contavão por periodos de 5, e exprimião um, dous, tres, etc., por *ben*, *niard*, *niet*, *guyanet*, *guyron*, e depois 6, 7, 8, etc , por *guyron-ben*, *guyron-niard*, etc., e 10 por *fouque*, depois *fouque-ben*, etc.

Quanto á maneira de representar os numeros por signaes escriptos, quasi todas as nações antigas empregavão os caracteres de seu alphabeto. Os orientaes forão os primeiros que estabelecêrão este uso, e os Gregos os imitárão ; porém aos Arabes é que devemos a invenção dos algarismos, e é da sua arithmetica que usamos, e a Gerbert, devemos o conhecimento della, pois, só pelo amor da sciencia que tanto o exaltava, se deu ao trabalho de ir entre elles conhecê-la.

A importancia das mathematicas, e por conseguinte da arithmetica, é reconhecida desde remota idade, pois que na escola de Pithagoras a classe dos mathematicos precedia á

dos physicos; e a tal ponto chegava nessas épocas o reconhecimento da necessidade dellas, que Platão excluia de suas lições physicas e methaphysicas os que não sabião mathematicas, e querendo alguem receber as lições de Xenocrato, como ignorasse a arithmetica e geometria, recebeu do philosopho esta dura resposta: retirai-vos, *ansas philosophiæ non habes*. Platão as considerava como muito proprias a fortificar as faculdades do espirito; e não seguia a opinião de Socrates, que entregando-se unicamente á moral, persuadio-se que o unico estudo que deve occupar o homem, é o que póde servir para tornal-o melhor. Hippocrates aconselhava a seu filho Thessalos o estudo da arithmetica e da geometria; porque dizia elle: *não só tornará vossa vida gloriosa e util nas cousas humanas, como fará vosso espirito muito intelligente, e mesmo mais proprio para objectos dependentes da medicina.*

Com effeito, não se póde negar que um estudo que torna o entendimento mais proprio para conceber e mais capaz de exercitar suas faculdades, deve formar uma parte consideravel da nossa educação; isto não quer dizer que todos os homens sejão mathematicos, porém quando por este estudo elles tem adquirido o bom methodo do raciocinio, podem empręga-lo em todas as outras partes de nossos conhecimentos; porque, como muito bem diz Lock: *as mathematicas são muito uteis para costumar o espirito a raciocinar com justeza e com ordem*; e Malebranche crê, não se poder dar melhor exemplo da maneira de proceder na indagação da verdade, do que o methodo dos geometras.

NOÇÃO PHILOSOPHICA

Dous objectos distinctos se apresentão na causalidade não intelligente do mundo physico: um, que é a forma ou a maneira de ser, e o outro que é o conteúdo ou a essencia da acção physica. A origem transcendental desta dualidade consiste na dualidade das leis do nosso saber; e na diversidade que resulta da applicação destas leis aos phenomenos dados *á posteriori*, é que consiste a dualidade do aspecto debaixo do qual se apresenta a natureza; dualidade esta que é classificada debaixo das concepções de *fórma* e de *conteúdo do mundo physico*. Ora, a fórma é que faz o objecto geral das mathematicas, e o conteúdo, o objecto geral da physica; a fórma, resultante da applicação das leis transcendentaes da sensibibilidade aos phenomenos dados *á posteriori* é o tempo para todos os objectos physicos em geral, e o espaço para os objectos physicos exteriores; logo, são as leis do tempo e do espaço (consideradas estas ultimas objectivamente), que fazem o verdadeiro objecto das mathematicas.

A philosophia das mathematicas, pois, que trata da terminação ulterior deste objecto, tem por fim a applicação das leis puras transcendentaes e logicas do saber, ao objecto geral das mathematicas. Por um meio subjectivo, ella deduz as leis primarias das mathematicas, ou seus principios philosophicos: e é destes principios, que as

mathematicas deduzem, por um meio puramente objectivo, as proporções cuja reunião constitue o objecto destas sciencias.

Nesta philosophia ha dous pontos de vista a considerar; um subjectivo, que é o saber, e outro objectivo, que é a sciencia. No primeiro trata-se das leis que segue o saber applicado ao objecto geral das mathematicas; no segundo trata-se das leis que segue este objecto geral na applicação do saber; isto é, as leis subjectivas são aquellas que recebe a nossa cognição pelo objecto das mathematicas, e as leis objectivas são as que recebe o objecto das mathematicas pela nossa cognição.

As leis subjectivas comprehendem o conteúdo e a fórma de nosso saber mathematico; o conteúdo cognitivo apresenta as differentes partes essenciaes de nossos conhecimentos mathematicos e os differentes objectos particulares distinctos e necessarios nestas sciencias, e constitue a sua architectonica; a fórma cognitiva apresenta as differentes maneiras de encarar estes objectos particulares, os differentes modos intellectuaes de seu conhecimento, e constitue a methodologia das mathematicas; as leis objectivas, que são as leis do objecto das mathematicas, constituem a metaphysica destas sciencias.

A architectonica das mathematicas é uma parte essencial, porque principalmente estabelece a technia destas sciencias; e a methodologia tem por fim determinar os differentes methodos que se devem seguir e que se seguem nos differentes ramos dellas: esta parte é purameute logica. Entre os differentes methodos, ha dous que importa muito conhecer, pois são de uso frequente aos mathematicos: é o methodo analytico e o synthetico. Methodo analytico é aquelle pelo qual se vai do simples para o composto, do particular para o geral, e se separão todos os elementos de uma idéa, ou de uma cousa, e se toma delles conhecimento. Methodo sinthetico é aquelle pelo qual se reunem os elementos separados pela analyse. Estes methodos são inseparaveis, e é interessante o conhecimento delles em mathematicas: porque sem analyse não se póde conhecer o particular, e sem a synthese, não se póde generalisar. Demais, estes dous methodos comprehendem o methodo experimental e o methodo deductivo; porqué o experimental é todo fundado na analyse, e o methodo deductivo na synthese; e é por isso que o primeiro é considerado o methodo de invenção e de investigação e o

segundo o methodo de ensino ou tradição. Os geometras chamão analyse a todos os ramos das sciencias mathematicas que dependem de calculos geraes, embora muitos mereção por excellencia o nome de synthese.

A metaphysica das mathematicas, finalmente é a parte principal da phylosophia destas sciencias ; pois ella é ajudada da architectonica, que se encarrega da determinação ulterior do objecto das mathematicas, e das leis fundamentaes que explicão estas sciencias.

As leis do tempo e do espaço que, segundo a determinação phylosophica geral, fazem o objecto das mathematicas, podem ser consideradas in abstracto ou in concreto. No 1º caso, fazem o objecto das mathematicas puras, e no 2º das mathematicas applicadas.

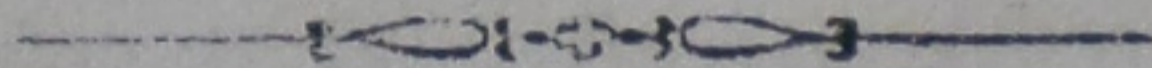
Tratando das mathematicas puras, applicando ao tempo considerado objectivamente, as leis transcendentaes do saber e especialmente a primeira das leis do entendimento, a quantidade, tomada em toda a sua generalidade, resulta a concepção da successão dos instantes e, na maior abstracção, a concepção ou antes o schêma do numero. Applicando a mesma lei transcendental á intuição do espaço considerado objectivamente resulta a concepção da conjuncção dos pontos, e na maior abstracção o schêma da extensão. Destas duas terminações particulares do objecto geral das mathematicas, nascem dous ramos das mathematicas puras : a que tem por objecto a extensão, é a geometria, e a que tem por objecto os numeros, é a algorithmia. (*)

Os numeros, como todos os objectos intellectuaes, podem ser considerados em geral e em particular; isto é, podem-se considerar separadamente as leis dos numeros, e os factos dos numeros. As leis dos numeros, fazem objecto de um ramo de algorithmia que se chama Algebra ; e os factos dos numeros, o de um outro ramo que é a Arithmetica.

Subjectivamente considerando, uma quantidade póde ser encarada debaixo de dous pontos de vista: sob um, se descobre a natureza dessa quantidade, e sob outro, se descobre a sua medida. O primeiro é fundado na especulação ; e o segundo em uma especie de acção ; isto é, no primeiro domina o entendimento, que é a faculdade da especulação,

(*) Algorithmia é uma palavra arabica que quer dizer sciencia dos numeros.

e no segundo domina a vontade, que é a faculdade da acção. Assim pois, a natureza e medida das quantidades, são dous objectos distinctos das mathematicas em geral, e especialmente da algorithmia e da geometria.

Chamão-se theoremas as proposições que tem por objecto a natureza das quantidades mathematicas ; e methodos as proposições que tratão da medida destas mesmas quantidades. O systhema dos theoremas, fórma em geral a theoria mathematica, e especialmente, a theoria algorithmica e a theoria geometrica. O systema dos methodos, fórma em geral a technia mathematica e, especialmente, a technia algorithmica e a technia geometrica.

NOÇÕES GERAES

A *sciencia,* definida succinta e elementarmente, *é o conjuncto dos conhecimentos claros e evidentes adquiridos pelo uso da razão.*

A sciencia theorisa e deduz regras, preceitos e systhemas: a isto denomina se *arte.*

Chama-se *materia* a substancia que constitue o Universo, ou, *tudo aquillo que affecta os nossos sentidos de um modo qualquer.*

O Universo é a reunião de todos os seres creados.

As mathematicas, segundo Montferrier, consideradas em seu todo ou como formando uma unica sciencia, póde ser definida a *sciencia das quantidades.*

Entende-se por *quantidade* tudo quanto póde variar augmentando-se ou diminuindo-se. Assim, um objecto material, v. gr., um pedaço de giz, apresenta-se, abstracção feita de sua natureza physica, como um aggregado de partes, isto é, como uma *quantidade* susceptivel de ser augmentada, addiccionando-se novas partes, ou de ser diminuida tirando-se algumas das partes componentes.

Chama-se *espaço absoluto* á esta immensa amplidão, que se estende indefinidamente em torno de nós, cujos limites não

se concebe, e onde girão todos os corpos celestes em seus movimentos eternos.

As porções d'este espaço absoluto occupadas pelos objectos materiaes, denomina-se um *logar*: logo estes logares são em si mesmo *quantidades*, pois que podem augmentar ou diminuir segundo augmente ou diminua o objecto material que o occupa.

E como isto é o mesmo para todos os objectos do mundo physico. segue-se que, quaesquer que sejão suas naturezas e propriedades caracteristicas, os concebemos universal e necessariamente como *quantidades*; portanto a *sciencia das quantidades* abrange todos os phenomenos do universo, e as leis das quantidades são ao mesmo tempo as leis das determinações d'estes phenomenos.

Assim, apresenta-nos a natureza a quantidade sob estes dous aspectos:

1.º *Reunião de partes constituindo um objecto material;*

2.º *O logar occupado por este objecto*, que se denomina *extensão d'este objecto.*

Se concebermos a quantidade sob o primeiro modo, a denominaremos *numerica*; se do segundo, *geometrica.*

Formão, portanto. o *numero* e a *extensão* o objecto geral das *Mathematicas*, que muito naturalmente se divide em dous ramos fundamentaes, em duas sciencias distinctas: a *sciencia dos numeros*, e a *sciencia da extensão.*

Os *numeros* e a *extensão* podem ser considerados de dous modos differentes: 1º, em si mesmos, isto é, individual ou collectivamente com abstracção da natureza do objecto physico; 2º, em relação á especie do objecto a que se applicão. A consideração abstracta constitue o objecto das *mathematicas puras;* a consideração applicada ou concreta, o das *mathematicas applicadas*

Os numeros, bem como todos os objectos dos conhecimentos humanos, podem ser considerados em *geral* e em *particular*. Por consideração geral entende-se tudo quanto é relativo ás propriedades communs a todos os numeros. ou que se refere ás *leis* que regem as quantidades numericas; e por consideração particular o que é relativo ás individualidades ou aos *factos* dos numeros.

Os numeros considerados em geral, ou as *leis geraes dos numeros*, constituem um dos ramos em que se divide a *sciencia dos numeros*, e que se denomina *Algebra*.

Os numeros considerados em particular, ou os *factos dos numeros*, fazem o objecto do segundo ramo que se denomina *Arithmetica*.

A Arithmetica e a Algebra constituem, pois, dous ramos differentes da sciencia geral dos numeros, e, como os factos são evidentemente subordinados ás leis, o modo mais racional de expôr esta sciencia seria começar pelas leis geraes, pela Algebra; entretanto é uso, principiar pela Arithmetica.